МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

КАРАКАЛПАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ БЕРДАХА

Д. УТЕБАЕВ, М.Н. МОСКАЛЬКОВ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ТАШКЕНТ – 2012

УДК: 323.1 (575.1)
ББК 22.19
У-84

У-84 Утебаев Д., Москальков М.Н. Численное моделирование нестационарных процессов механики сплошной среды. –Т.: «Fan va texnologiya», 2012, 160 стр.

ISBN 978–9943–10–773–1

Монография посвящена построению и исследованию новых численных методов повышенной точности для линейных нестационарных задач механики сплошной среды и разработке технологии получения различных оценок точности этих методов, а также рекомендации по выбору из семейства схем с параметрами оптимальных по точности передачи основных особенностей дифференциального решения. Особое внимание уделяется разработке технологии экономичных алгоритмов реализации схем. Представляется перспективным, использование полученных в монографии результатов для численного моделирования сложных математических объектов, как нестационарные нелинейные уравнения.

Книга рассчитана для специалистов в различных областях механики и вычислительной математики, для студентов и преподавателей университетов, а также для всех, кто имеет дело с численным моделированием нестационарных задач.

УДК: 323.1 (575.1)
ББК 22.19

ISBN 978–9943–10–773–1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Нестационарные процессы необычайно широко распространены в окружающем нас мире, поэтому практически во всех разделах физики и механики мы встречаемся с необходимостью их исследования – как для более углубленного проникновения в фундаментальные законы природы, так и для использования в важных практических приложениях. С ними часто приходится сталкиваться при исследовании процессов распространения тепла и распространения волн, а также динамического поведения конструкции. Математическими моделями этих процессов являются нестационарные линейные уравнения параболического, гиперболического типов (или нелинейные уравнения) и другие нестандартные (со смешанными производными порядка больше 2-уравнения типа Соболева) волновые уравнения. Решение этих уравнений для ограниченных областей, соответствующих реальным конструкциям и сооружениям, связано со значительными математическими трудностями и решаются они, в основном, численными методами. Как отмечают А.А.Самарский и А.П.Михайлов [103], «…как бы глубоки и разнообразны ни были методы качественного анализа математических моделей, область их применимости весьма ограничена. Это – либо простые главным образом линейные модели, либо отдельные фрагменты сложных, в том числе нелинейных моделей. Единственным универсальным способом исследования моделей является применение численных методов для нахождения приближенного решения поставленной задачи с помощью средств современной вычислительной техники и информатики». Они подчеркивают, что проблемы численного моделирования не снимаются сами собой по мере появления все более мощных и дешевых компьютеров. Это связано, по меньшей мере, с двумя причинами: усложнением выдвигаемых как практикой, так и теорией задач и необходимостью проведения большого числа серий вычислительных экспериментов для достаточно полного изучения объекта. Поэтому разработка эффективных вычислительных алгоритмов всегда остается одной из ключевых задач математического моделирования.

Природа ударных волн в газах, жидкостях и твердых телах, описываемых нестационарными уравнениями, часто такова, что решения их математических моделей нужно искать в классах обобщенных решений. Это указывают построения и исследования приближенных методов, которые позволяют, находить решения этих задач с высокой точностью при минимальных (естественных) требованиях к гладкости исходных данных, т.е. получения согласованных оценок скорости сходимости. Такие оценки типичны для метода конечных элементов. Они получены в основном для эллиптических уравнений. Впервые такие оценки для метода конечных разностей получены А.А.Самарским, Р.Д.Лазаровым и В.Л.Макаровым [102]. В частности, с помощью операторов точных разностных схем ими получены согласованные с гладкостью искомого решения, оценки скорости сходимости разностных схем для эллиптических уравнений.

Решая численными методами дифференциальную задачу, мы заменяем уравнения, описывающие некоторые физические процессы в непрерывной среде уравнениями (разностной схемой), описывающими эти процессы в дискретной среде. При этом разностные схемы строятся не единственным образом. Следовательно, встает вопрос об отборе из множества схем таких, которые лучше передают основные особенности решения дифференциальной задачи на достаточно грубых сетках. Одним из критериев отбора разностных схем для гиперболических уравнений являются ее хорошие дисперсионные свойства. Особое значение дисперсионный анализ имеет при расчете обобщенных (разрывных или быстроменяющихся) решений, присущих гиперболическим уравнениям. Оказывается, что схемы повышенного порядка точности имеют лучшие дисперсионные свойства, то есть лучше передают основные свойства обобщенных (негладких) решений дифференциальных задач, позволяют точнее приблизить негладкие решения.

Среди численных методов особое место занимает метод конечных элементов. Он является мощным средством приближенного решения дифференциальных уравнений, описывающих различные физические процессы. Многообразны его применения в технике и в научных исследованиях. На основе этого метода можно построит схемы повышенной точности для нестационарных задач по пространственным переменным (достаточно хорошо изученная теория) и по временной переменной. Преимущества таких схем состоит в том, что они лучше передают особенности негладких решений дифференциальной задачи (см. работы [59, 61-63, 69, 76, 77, 123, 124]). Применение этого метода к решению задач со многими неизвестными выявляют некоторые ограничения, однако появления суперсовременной вычислительной техники делает его универсальным методом решения разнообразных прикладных задач. Такие алгоритмы особенно важны при разработке современной нанотехнологии, так как для их реализации нужны сверхточные результаты. А таких результатов можно получить только на основе алгоритмов повышенного порядка точности.

В книге излагаются численные методы повышенной точности для моделирования линейных нестационарных процессов механики сплошной среды. Разрабатываются технологии получения оценок точности численных методов и экономичных алгоритмов их реализации.

ГЛАВА 1

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ ИХ РЕШЕНИЯ

Приведены некоторые обозначения, вспомогательные утверждения и примеры некоторых нестационарных краевых задач. А также приведены постановки абстрактных задач Коши. Кроме того, дан обзор о некоторых часто применяемых на практике численных методах решения нестационарных задач.

1.1. Некоторые обозначения и вспомогательные утверждения.

1.1.1. Пространства функций непрерывного аргумента [102, стр. 20]

Всюду в настоящем параграфе буквами $x, t, \xi, \dots$ мы будем обозначать точки пространства R^n, а символами $dx, dt, d\xi, \dots$ − лебегову меру. Будем использовать также мультиндексные обозначения $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ − целые числа и

$$D_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha, \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \; |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j .$$

Пусть задано открытое ограниченное множество $\Omega \in R^n$. Пространство $D(\Omega)$ состоит из всех бесконечное число раз дифференцируемых функций $\vartheta : \Omega \to R^1$ с компактными носителями. Будем говорить, что последовательность функций $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots,$ из $D(\Omega)$ сходится к функции $\vartheta \in D(\Omega)$, если при каждом $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ последовательность $D^\alpha \vartheta_k(x)$ равномерно на Ω сходится к функции $D^\alpha \vartheta\,(x)$.

Рассмотрим множество $C^m(\overline{\Omega})$ всех непрерывных в $\overline{\Omega}$ ($\overline{\Omega}$ − есть замыкание Ω в евклидовой метрике) функций, имеющих в области Ω все производные до порядка m, непрерывные в $\overline{\Omega}$. В множестве $C^m(\overline{\Omega})$ можно ввести норму:

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq m} \; \max_{x \in \overline{\Omega}} \left| D^\alpha f(x) \right| = \max_{0 \leq k \leq m} |f|_{C^k(\overline{\Omega})} .$$

Если $f(x)$ – измеримая функция, то говорят, что $f \in L_p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, если норма

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \begin{cases} (\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \le p < \infty, \\ \vartheta rai \max\limits_{x \in \Omega} |f(x)|, \ \ p = \infty \end{cases}$$

конечна.

Пространство есть вещественное пространство Гильберта, если в неё ввести скалярное произведение с помощью равенства $(u, \vartheta) = \int\limits_{\Omega} u(x)\vartheta(x)dx$.

Пусть $A = A^* > 0$ оператор, отображающий гильбертово пространство H в H. Определим энергетическое пространство H_A, как пространство элементов $u \in H$, для которых конечна норма $\|u\|_A = \sqrt{(Au, u)} = \sqrt{(u, u)_A}$.

Функция $D^\alpha f(x) \in L_p(\Omega)$ называется обобщенной производной порядка α в области Ω функции $f(x) \in L_p(\Omega)$, если для любой функции $\varphi \in D(\Omega)$ выполняется тождество:

$$\int\limits_{\Omega} D^\alpha f(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} f(x) D^\alpha \varphi(x)dx.$$

Для всякого целого $m \ge 0$ и действительного числа p, такого, что $1 \le p \le \infty$, определим пространство Соболева $W_p^m(\Omega)$, состоящее из тех функций $u \in L_p(\Omega)$, для которых все частные производные $D^\alpha u(x)$ (в смысле обобщенных производных) при $|u| \le m$ принадлежат пространству $L_p(\Omega)$.

Относительно нормы:

$$\|u\|_m = \|u\|_{m,\Omega} = \|u\|_{W_p^m(\Omega)} = (\sum_{s=0}^{m} |u|_{s,p,\Omega}^p)^{\frac{1}{p}}, \quad |u|_{W_p^m(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{o,p,\Omega}^p)^{\frac{1}{p}}$$

множество $W_p^m(\Omega)$ является банаховым пространством.

Пространство $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$, является замыканием множества $D(\Omega)$ в норме пространства $W_p^m(\Omega)$. Очевидно, что $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega) \subset W_p^m(\Omega)$. В пространстве $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ полунорма $|\cdot|_{m,\Omega}$ эквивалентно норме $\|\cdot\|_{m,\Omega}$.

Кроме того, будут использованы следующие обозначения пространств (см. [44]): $C\{[0,T];\ H\}$-пространство непрерывных функций на (0,*T*) со значениями в *H*, где *H* некоторое банахово пространство; $L_2\{[0,T];\ H\}$-пространство функции, суммируемых с квадратом на (0,*T*) со значениями в *H*.

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения:

Лемма 1.1 (лемма Брэмбла-Гильберта [102, стр. 29]). Пусть Ω - открытая выпуклая ограниченная область в R^n с диаметром d. Пусть линейный функционал $l(u)$ ограничен в $W_2^m(\Omega)$, где $0 < m = \overline{m} + \lambda,\ \overline{m}$ - целое неотрицательное число, $0 \le \lambda \le 1$, т.е.

$$\left|l(u)\right| \le M\left(\sum_{j=0}^{\overline{m}} d^{2j}\left|u\right|_{j,\Omega}^2 + d^{2m}\left|u\right|_{m,\Omega}^2\right)^{1/2}.$$

Если $l(u)$ обращается в нуль на многочленах степени $\overline{m}$ по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$, то существует постоянная $\overline{M}$ зависящая от Ω, но независящая от $u(x)$, такая, что $\left|l(u)\right| \le M\overline{M}d^m\left|u\right|_{m,\Omega}$.

В частности, для $m = k+1$, где $k \ge 0$ целое число, имеет место оценка:

$$\left|l(u)\right| \le M\overline{M}\left|u\right|_{k+1,\Omega},$$

если $l(u)$ обращается в нуль на множестве π_k - всех многочленов степени k от переменных $x \in \Omega$.

Лемма справедлива и для невыпуклых, но звездных относительно некоторого шара $B \subset \Omega$ областей.

Лемма 1.2 (неравенство Фридрихса [102, стр. 23]). Для $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \left|gradu\right|^2 dx = \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx \ge \gamma\int_\Omega u^2 dx,$$

где $\gamma = na$, a - сторона n - мерного куба, содержащего Ω.

Лемма 1.3 (лемма Гронуола [94, стр. 28]).

Для функции $g(t)$, удовлетворяющей неравенство:

$$\frac{dg}{dt} \le a\,g(t) + b(t),\ t > 0,\ a = const,\ b(t) \ge 0,$$

верна оценка

$$g(t) \le \exp(at)\left(g(0) + \int_0^t \exp(-a\theta)b(\theta)d\theta\right).$$

1.1.2. Сетки

Приведем примеры сеток, используемых в дальнейшем:

а) с е т к и н а о т р е з к е. Простейшей сеткой на отрезке $0 \le x \le l$ является равномерная сетка с целыми узлами:

$$\overline{\omega} = \left\{ x_i = ih, i = \overline{0,N}; h = l / N \right\}, \omega = \overline{\omega} \setminus (x_0 = 0, x_N = l).$$

Для сеток по временной переменной на отрезке $0 \le t \le T$ применяются обозначения:

$$\overline{\omega}_\tau = \left\{ t_n = n\tau, n = \overline{0,M}; \tau = T / M \right\}, \omega_\tau = \overline{\omega}_\tau \setminus (t = 0),$$

б) с е т к и в п р я м о у г о л ь н и к е. Простейшая сетка в прямоугольнике $\overline{\Omega} = \{ x = (x_1, x_2): \quad 0 \le x_\alpha \le l_\alpha,\ \alpha = 1{,}2 \}$ получается декартовым произведением сеток с целыми узлами для отрезков $0 \le x_1 \le l_1$ и $0 \le x_2 \le l_2$, $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_\alpha = \left\{ x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}; h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha \right\}.$

1.1.3. Сеточные функции

Для сеточных функций, их разностных производных будем использовать общепринятые обозначения [90]. Приведем некоторые из них.

Для сеточных функций одной пространственной переменной используем следующие обозначения:

$$y = y(x), \quad y^{(\pm)} = y(x \pm h), \quad y_x = (y^{(+1)} - y) / h, \quad y_{\bar{x}} = (y - y^{(-1)}) / h,$$

$$y_{\bar{x}x} = (y^{(+1)} - 2y + y^{(-1)}) / h^2.$$

Если функция зависит и от временной переменной, то

$$y = y(x,t),\ \hat{y} = y(x, t + \tau),\ \check{y} = y(x, t - \tau),\ y_t = (\hat{y} - y) / \tau,\ y_{\bar{t}} = (y - \check{y}) / \tau,$$

$$y_{\overset{\circ}{t}} = (\hat{y} - \check{y}) / 2\tau, \quad y_{\bar{t}t} = (\hat{y} - 2y + \check{y}) / \tau^2,$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1 - \sigma) y, \quad y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y + \sigma_2 \check{y}.$$

Для сеточных функций двух пространственных переменных будем использовать такие обозначения:

$$y^{(\pm 1_1)} = y(x_1 \pm h_1, x_2), \quad y^{(\pm 1_2)} = y(x_1, x_2 \pm h_2), \quad y_{\bar{x}_\alpha} = (y - y^{(-1_\alpha)}) / h_\alpha,$$

$$y_{x_\alpha} = (y^{(+1_\alpha)} - y) / h_\alpha,\ y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = (y^{(+1_\alpha)} - 2y + y^{(-1_\alpha)}) / h_\alpha^2,\ \ \alpha = 1{,}2.$$

Для преобразования разностных выражений нами будут использованы сеточные аналоги формул интегрирования по частям

$$\int_a^b u'\vartheta dx = u\vartheta\Big|_a^b - \int_a^b u\vartheta' dx. \qquad (1.1)$$

Пусть $y = y(x_i), \vartheta = \vartheta(x_i)$ заданные на сетке $\overline{\omega}$ функции. Введем скалярные произведения формулами:

$$(y,\vartheta) = \sum_{i=1}^{N-1} hy(x_i)\vartheta(x_i), \quad [y,\vartheta) = \sum_{i=0}^{N-1} hy(x_i)\vartheta(x_i), \quad (y,\vartheta] = \sum_{i=1}^{N-1} hy(x_i)\vartheta(x_i).$$

Тогда аналогом формулы (1.1) является формула суммирования по частям

$$(y,\vartheta_x) = -(\vartheta, y_{\bar{x}}] + (y\vartheta)_N - y_0\vartheta_1. \qquad (1.2)$$

Если в граничных узлах сетки $\overline{\omega}$ $y_0 = y_N = 0$ или $y_0 = \vartheta_N = 0$, то формула (1.2) принимает вид $(y,\vartheta_x) = -(\vartheta, y_{\bar{x}}]$.

Далее, нам понадобятся еще одно утверждение. Пусть $g_n = g(t_n)$ и $f_n = f(t_n)$ – сеточные функции, заданные при $t_n = n\tau,\ n = \overline{0,M}$.

Лемма 1.4 (сеточный аналог леммы Гронуола) [90, стр. 311]. Пусть $g_n \ge 0,\ n = 1,2,...$ и $f_n \ge 0,\ n = 0,1,...$ неотрицательные функции. Если f_n – неубывающая функция $(f_{n+1} \ge f_n)$, то из неравенства:

$$g_{n+1} \le c_0 \sum_{k=1}^{n} \tau g_k + f_n, \quad n = 1,2,..., \quad g_1 \le f_0, c_0 > 0 - const$$

следует оценка $g_{n+1} \le e^{c_0 t_n} f_n$.

1.1.4. Пространства сеточных функций

Введем на множестве функций заданные на сетке $\overline{\omega}$ скалярное произведение

$$(y,\vartheta) = \sum_{i=0}^{N} hy(x_i)\vartheta(x_i) \ \text{ и норму } \ \|y\| = \sqrt{(y,y)}.$$

В результате, получим линейное пространство сеточных функций H.

Нами будут использованы следующие обозначения сеточных норм для абстрактной функции $\varphi(t)$ со значениями в H или H_A:

$$\|\varphi\|_0 = \Big(\sum_{t'=0}^{t_1} \tau\|\varphi(t')\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\varphi\|_A = \Big(\sum_{t'=0}^{t_1} \tau\|\varphi(t')\|_A^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < t \le T.$$