Q.SH. RUZMETOV
G'.X. DJUMABAYEV

MATEMATIKA

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS
TA’LIM VAZIRLIGI

K.Sh.RUZMETOV, G‘.X.DJUMABAYEV

MATEMATIKA

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan oliy o‘quv yurtlarining 5410100 – Agrokimyo va agrotuproqshunoslik ta’lim yo‘nalishi talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan

«O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati» nashriyoti
Toshkent – 2018

UO‘K: 51(075.8)
KBK: 22.1
R 86

Ruzmetov, K.Sh.
R 86 Matematika [Matn]: darslik / K.Sh.Ruzmetov, G‘.X.Djumabayev. – Toshkent: «O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati» nashriyoti, 2018. – 452 b.

UO‘K: 51(075.8)
KBK: 22.1

Ushbu darslik qishloq xo‘jaligi sohasida tahsil oladigan talabalarga «Matematika» fanini o‘zlashtirishlariga yordam berish maqsadida tayyorlandi. Darslikka bakalavriyat talabalari uchun rejalashtirilgan o‘quv soatiga mos mavzular kiritilgan. Har bir mavzu bo‘yicha nazariy tushunchalar bayon etilib, namunaviy misol va masalalar yechib ko‘rsatilgan.

Taqrizchilar:
T.T.Tuychiyev – UzMU «Matematik analiz» kafedrasi dotsenti, f-m.f.n.;
A.A.Fayziyev – ToshDAU «Oliy matematika, fizika va kimyo» kafedrasi dotsenti, f-m.f.n.

ISBN 978-9943-5788-1-7

SO‘ZBOSHI

Ko‘pgina oliy ta’lim muassalarida matematika fani turli hajmda (tayyorlanadigan mutaxassislikka qarab, ma’lum dastur asosida) o‘qitiladi.

Matematikani o‘qitishdan ko‘zlangan maqsad:

1) talabalarni matematik ma’lumotlar majmuasi bilan tanishtirish, uning turli uslublarini o‘rganish, ular orasidagi bog‘lanishlarni bildirish;

2) talabalarni mantiqiy fikrlashga, matematik usullarni amaliy masalalarni yechishda qo‘llashga, jumladan qishloq xo‘jaligi, to‘qimachilik va yengil sanoat, iqtisodiy va mexanik masalalarning matematik modellarini qurishga o‘rgatishdan iborat.

Ravshanki, o‘quv jarayonida darsliklar, o‘quv qo‘llanmalari, shuningdek darslik shaklida yozilgan kitoblarning ahamiyati katta.

Matematika sohasida turli hajmda, turli sohalarga mo‘ljallab yozilgan kitoblar bor. Ayni paytda, jamiyatda barcha sohalarning shiddat bilan rivojlanayotganligi ularga mos keladigan kitoblarning yozilishini taqozo etmoqda.

Shuni e’tiborga olib, mualliflar matematika sohasi bo‘yicha bilimlariga, shuningdek oliy ta’lim muassasalarida matematikadan o‘tkazilgan darslardan hosil bo‘lgan tajribaga tayangan holda ushbu darslikni yozishdi.

Mazkur darslik qishloq xo‘jaligi sohasiga mo‘ljallangan.

Darslikda mavzularning muayyan ketma-ketlikda va o‘zaro uzviy bog‘lanishda bo‘lishiga, ma’lumotlarni qisqa va ravon bayon etilishiga, amaliy masalalarni yechishda matematik usullardan unumli foydalanishga alohida e’tibor qaratilgan.

1-bob. DETERMINANTLAR

1-§. Determinantlar

Aytaylik, ikkinchi va uchunchi tartibli kvadrat matritsalar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

berilgan bo'lsin. Bu matritsalarga mos ravishda

$$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \text{ va } a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}$$

sonlarni mos qo'yamiz. Odatda ular ikkinchi va uchinchi tartibli determenantlar deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu ifodalarni mos ravishda A va B matritsaning determinanti, ularni $detA$, $detB$ kabi ham belgilanadi.

Demak,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

1-misol. Quyida berilgan ikkinchi tartibli matritsaning determinantini hisoblang:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Yechish. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 - 4 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$

2-misol. Quyida berilgan ikkinchi tartibli matritsaning determinantini hisoblang:

$$A=\begin{pmatrix}6 & 9\\ 10 & 8\end{pmatrix}.$$

Yechish. $|A|=\begin{vmatrix}6 & 9\\ 10 & 8\end{vmatrix}=6\cdot 8-10\cdot 9=48-90=-42$

3-misol. Quyida berilgan ikkinchi tartibli determinantni hisoblang: $\begin{vmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{vmatrix}$.

Yechish. Yuqoridagi ta'rifga asosan:

$$\begin{vmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{vmatrix}=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$$

Demak,

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Uchinchi tartibli determinantning qiymati 6 ta had yig'indisidan iborat bo'lib, ulardan uchtasi musbat ishorali, qolgan uchtasi esa manfiy ishorali bo'ladi.

4-misol. Quyidagi uchinchi tartibli determinantni uchburchak usuli bilan hisoblang:

$$\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -4\\ 4 & 1 & -3\end{vmatrix}$$

Yechish.

$$\begin{vmatrix}5 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -4\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix}=5\cdot 1\cdot(-3)+(-2)\cdot(-4)\cdot 4+3\cdot 1\cdot 1-$$

$$-4\cdot1\cdot1-3\cdot(-2)\cdot(-3)-1\cdot(-4)\cdot5=$$

$$=-15+32+3-4-18+20=18$$

5-misol. Quyidagi uchinchi tartibli determinantni uchburchak usuli bilan hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Yechish.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot4\cdot2+1\cdot0\cdot5+3\cdot1\cdot(-1)-$$

$$-(-1)\cdot4\cdot5-1\cdot3\cdot2-2\cdot0\cdot1=27.$$

Eslatma. Yuqoridagidek, n tartibli ($n>3$) determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdot\cdot\cdot a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdot\cdot\cdot a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdot\cdot\cdot a_{nn} \end{vmatrix}$$

tushunchasi kiritiladi.

Aytaylik, uchinchi tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

berilgan bo‘lsin. Bu determinant biror

$$a_{ik}\ (i=1,2,3;\ k=1,2,3)$$

elementini olib, shu element joylashgan yo'lni hamda ustunni o'chiramiz. Qolgan elementlari ikkinchi tartibli determinantni hosil qiladi. Uni a_{ik} *element minori* deyiladi va u M_{ik} kabi belgilanadi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

determinant $a_{12}=5$ elementning minori

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

bo'ladi.

Uchinchi tartibli determinant 9 ta minorga ega bo'ladi.

Ushbu

$$(-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$$

miqdor (2) determinant a_{ik} elementning algebraik to'ldiruvchisi deyiladi va A_{ik} orqali belgilanadi:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$$

8-ta'rif. a_{ij} minorning (elementning) algebraik to'ldiruvchisi deb $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ songa aytiladi.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

determinant $a_{13}=3$ elementining algebraik to'ldiruvchisi

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 0 - 2 \cdot 3) = -6$$

bo'ladi.

2-§. Determinantning xossalari

Determinant qator xossalarga ega. Quyida ularni keltiramiz:

1) determinantning yo‘llarini mos ustunlari bilan almashtirilsa determinantning qiymati o‘zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};$$

2) determinantning ixtiyoriy ikki yo‘lini (ikki ustunini) o‘zaro almashtirilsa, determinantning qiymati o‘zgarmasdan, uni ishorasi esa qarama-qarshisiga o‘zgaradi;

3) determinantning ikki yo‘li (ustuni) bir xil bo‘lsa, determinantning qiymati nolga teng bo‘ladi;

4) determinantning ixtiyoriy yo‘lida (ustunida) turgan barcha elementlari o‘zgarmas *k* songa ko‘paytirilsa, determinanting qiymati ham k soniga ko‘payadi.

Masalan:

$$3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(24+60+56-18-70-64) = -36.$$

$$\begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 7 & 3\cdot 3 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 72+180+168-54-192-210 = -36.$$

$$\begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 7 & 3 \\ 3\cdot 5 & 6 & 8 \\ 3\cdot 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 72+180+168-54-192-210 = -36.$$

Laplas teoremasi. Determinantning qiymati uning ixtiyoriy satr (ustun) elementlari bilan, shu elementlarga mos algebraik to‘ldiruvchilar ko‘paytmalari yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

Bu formulaga Δ determinantni i satr elementlari bo‘yicha yoyish formulasi deyiladi.

Determinantning biror satr (ustun) elementlari bilan uning boshqa satri (ustuni) elementlari algebraik to‘ldiruvchilari ko‘paytmalarining yig‘indisi nolga teng.

Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar bevosita ta’rifga ko‘ra hisoblanadi.

Masalan:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 10$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 3 -$

$-3 \cdot (-1) \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 4 \cdot 3 = 10$

Uchinchi tartibli determinantlarni hisoblashda shuningdek ushbu